AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Podstawy wytrzymałości materiałów

IMiR - Wykład Nr 7

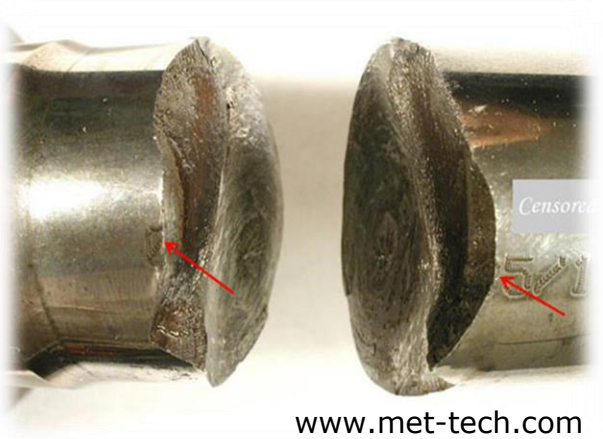
Zginanie prętów prostych – siły wewnętrzne

siły wewnętrzne w belkach, twierdzenie Swedlera – Żurawskiego, wyznaczanie wykresów sił poprzecznych i momentów zginających.

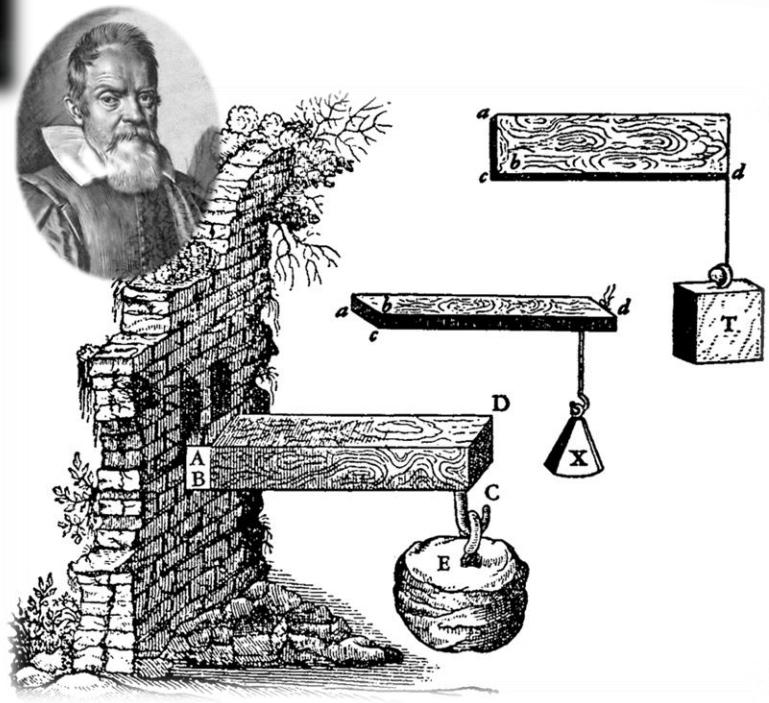
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

Dr hab. inż. Tomasz Machniewicz
B2, II p., pok. 206
E-mail: machniew@agh.edu.pl

7.1. Zginanie – przypadki „z życia” inżynierów – i nie tylko…



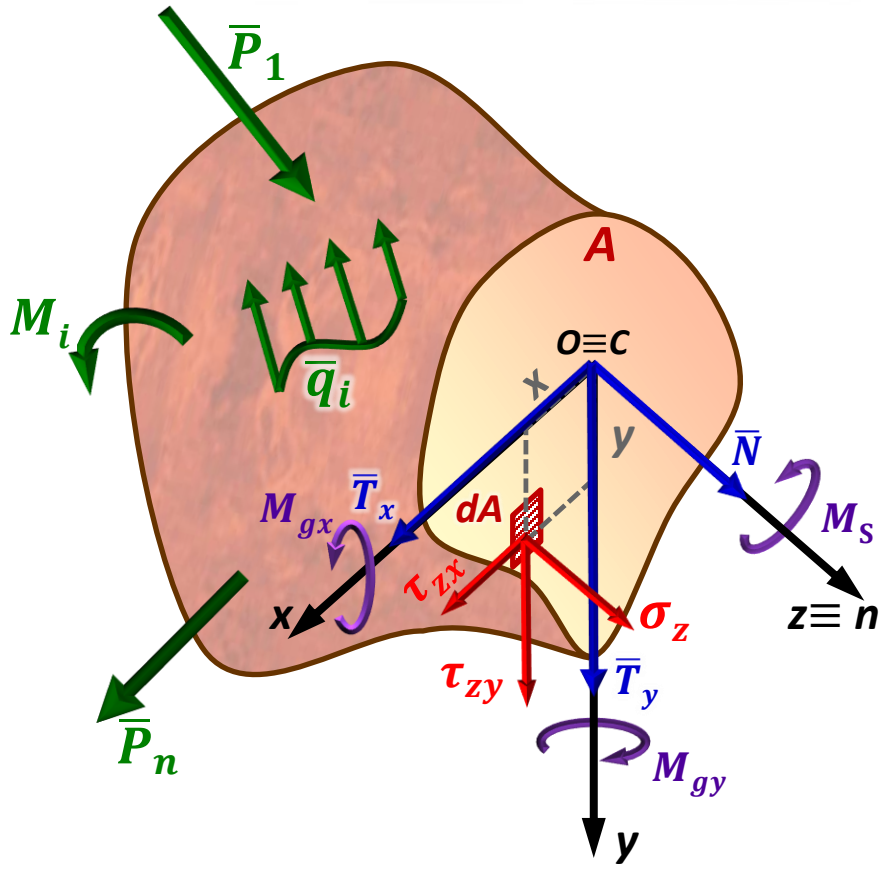
www.met-tech.com



Galileo Galilei (1564–1642)
Dialogues Concerning Two New Sciences, 1638

http://www.telegraph.co.uk

7.2. Zginanie – równowaga sił wewnętrznych i naprężeń



$$N = \int_A \sigma_z \, dA$$ - rozciąganie/ściskanie

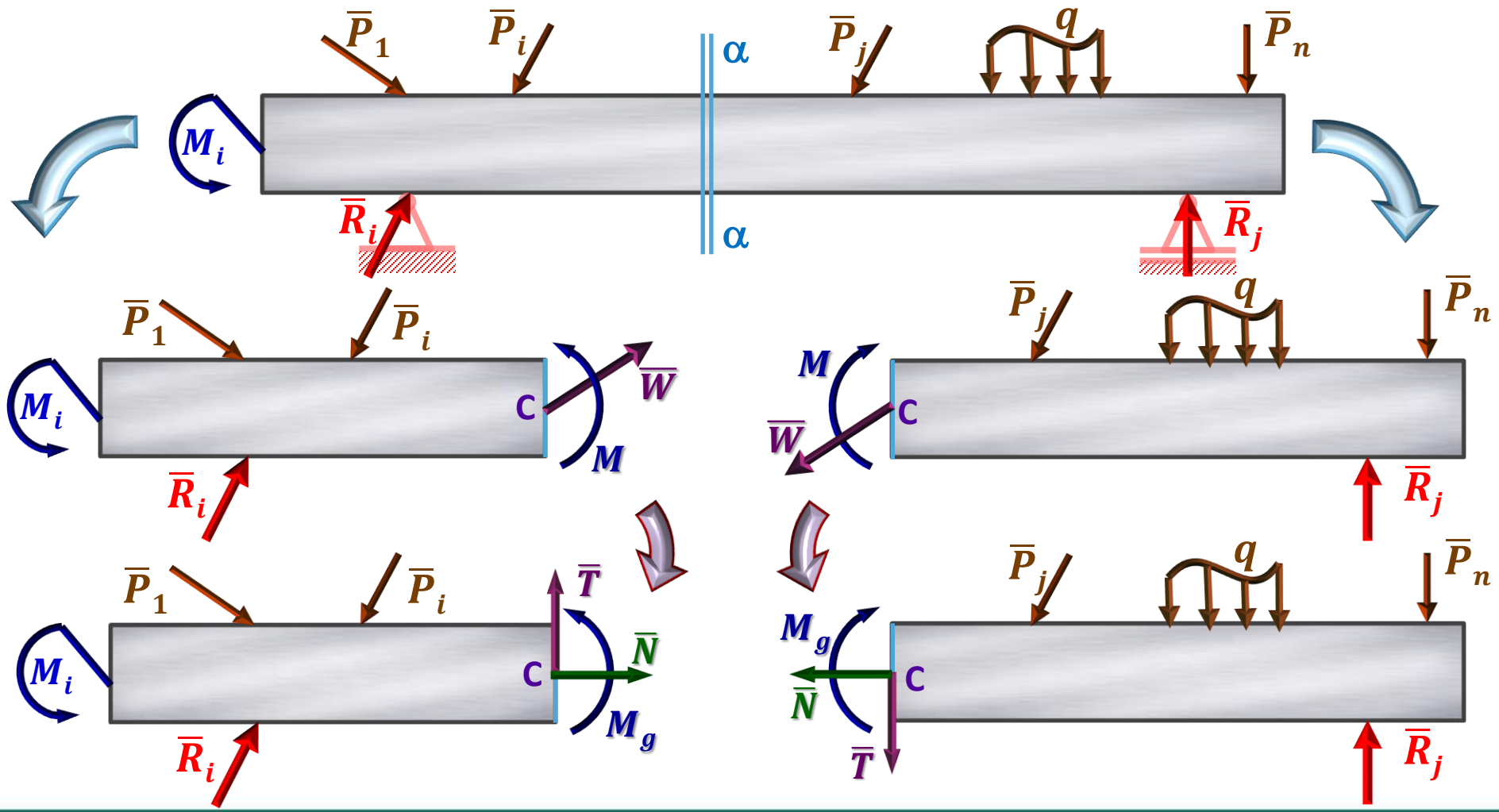
$$\left.\begin{aligned} T_x &= \int_A \tau_{zx} \, dA \\ T_y &= \int_A \tau_{zy} \, dA \end{aligned}\right\}$$ - ścinanie

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \int_A \sigma_z \, y \, dA \\ M_y &= \int_A \sigma_z \, x \, dA \end{aligned}\right\}$$ - zginanie

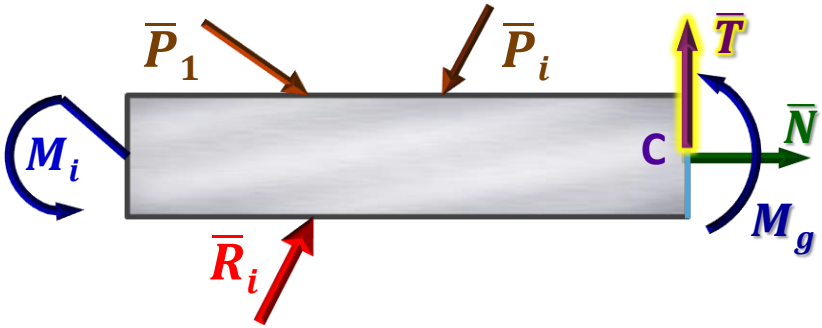
$$M_S = \int_A \left(\tau_{zy} \, x - \tau_{zx} \, y\right) \, dA$$ - skręcanie

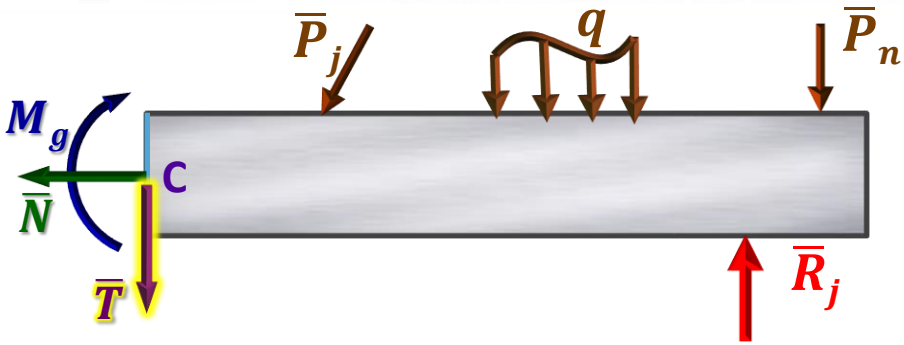
7.3. Siły wewnętrzne w belkach

Belka – element konstrukcji o kształcie pręta, tj. o długości znacznie większej od wymiarów poprzecznych, poddany w dominującym stopniu zginaniu.



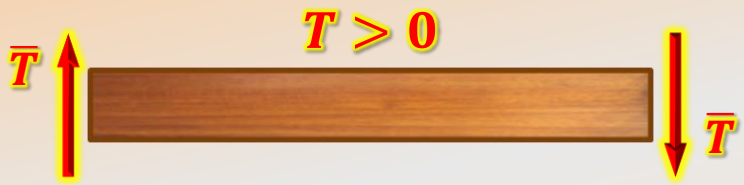
7.3. Siły wewnętrzne w belkach

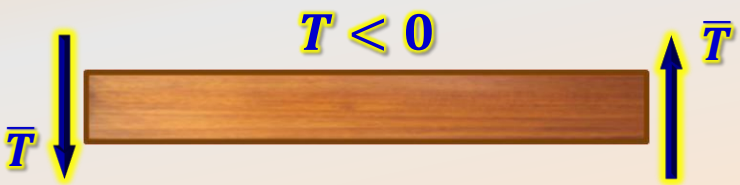




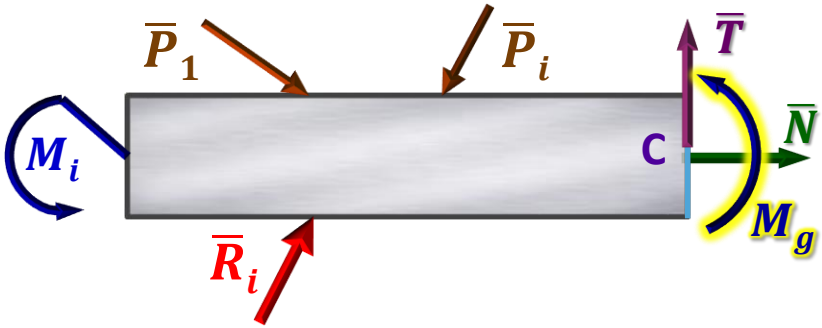
Siła poprzeczna (siła tnąca) w danym przekroju belki, jest algebraiczną sumą wszystkich sił poprzecznych (prostopadłych do osi belki) działających po jednej stronie rozpatrywanego przekroju.

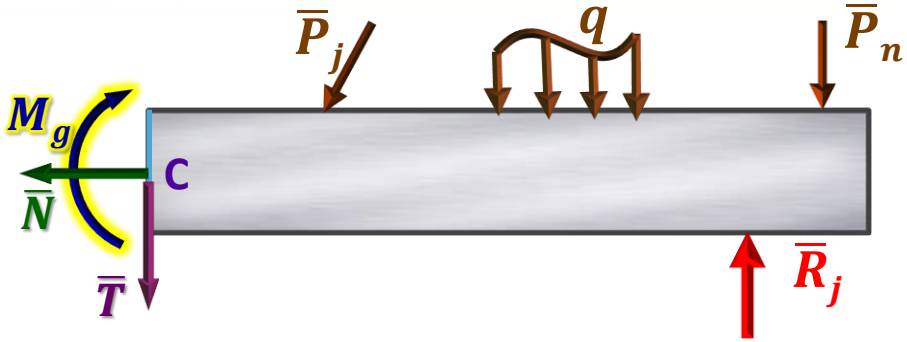
Umowa dotycząca znaków sił poprzecznych:





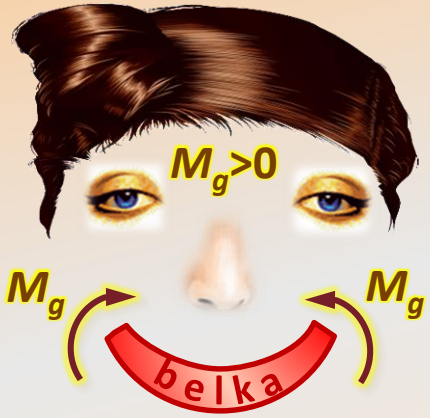
7.3. Siły wewnętrzne w belkach

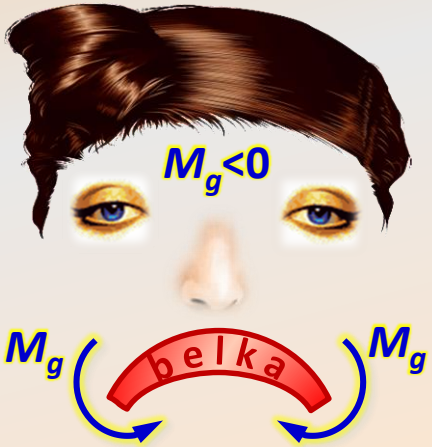




Moment zginający (M_g) w dowolnym przekroju belki poddanej działaniu płaskiego dowolnego układu sił jest algebraiczną sumą momentów pochodzących od wszystkich obciążeń działających po jednej ze stron tego przekroju, obliczanych względem jego środka ciężkości.

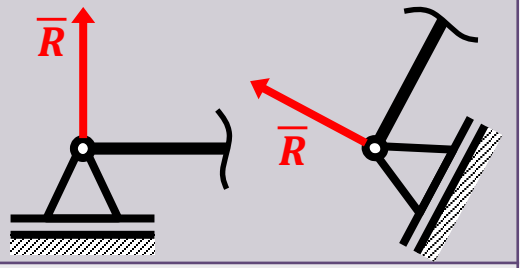
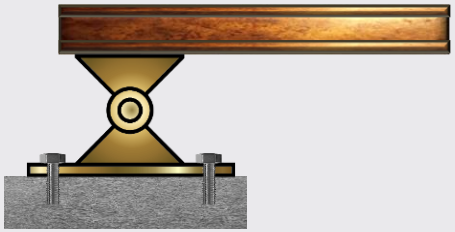
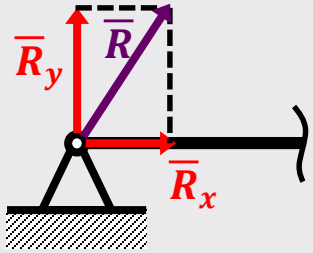
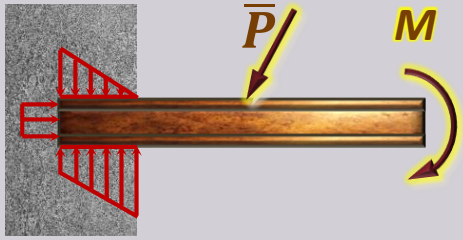
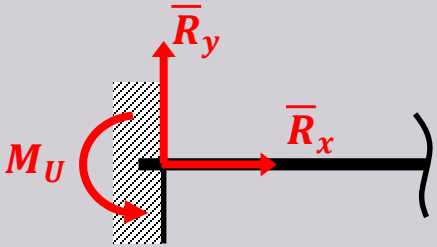
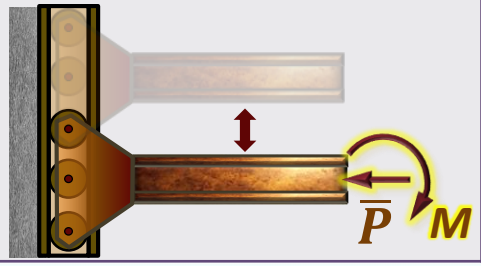
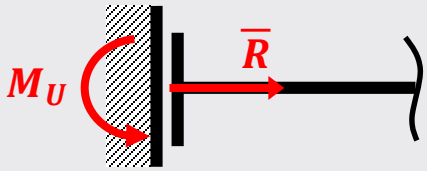
Umowa dotycząca znaków momentów zginających:



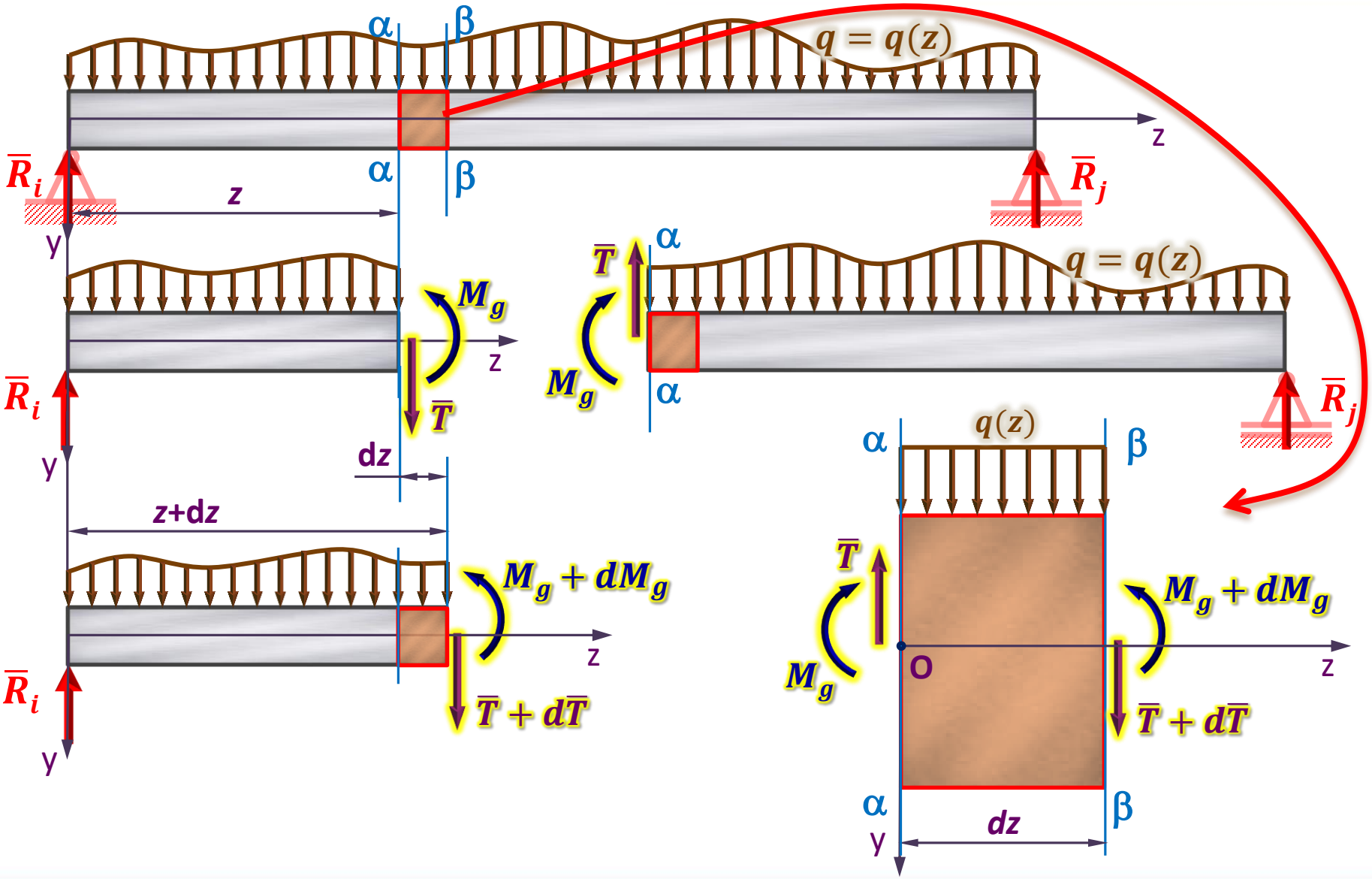


7.4. Więzy belek

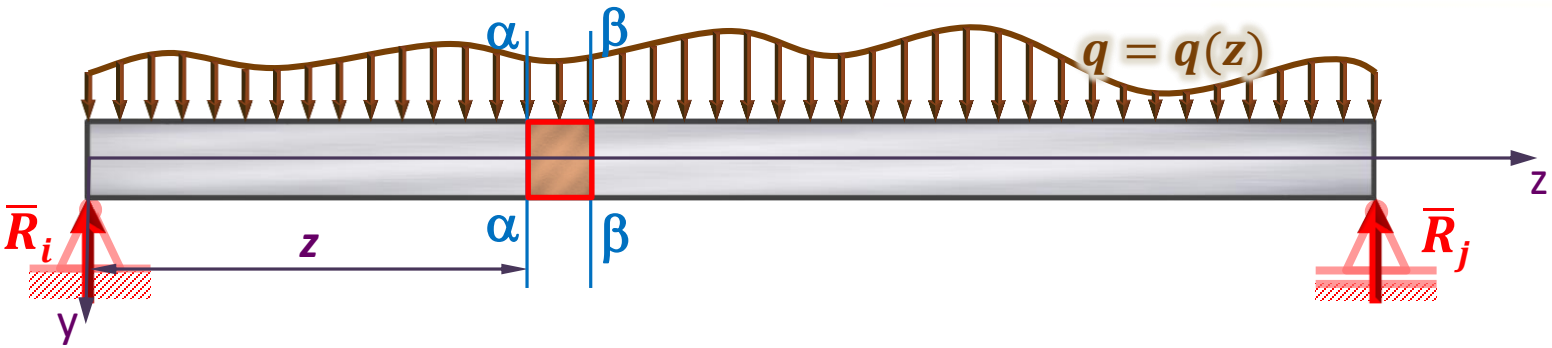
Charakterystyczne rodzaje więzów belek i związane z nimi siły reakcji.

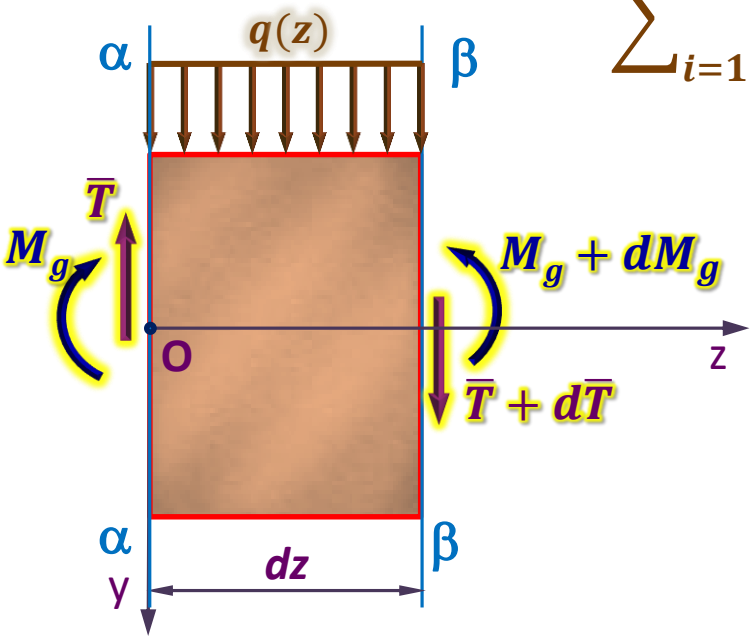
a) podpora przegubowa przesuwna reakcja prostopadła do płaszczyzny przesuwu		
b) podpora przegubowa stała siła reakcji o dowolnym kierunku (dwie składowe reakcji)		
c) utwierdzenie (wspornik) siła reakcji o dowolnym kierunku (dwie składowe reakcji) oraz moment utwierdzenia		
c) utwierdzenie przesuwne moment utwierdzenia oraz siła reakcji prostopadła do płaszczyzny przesuwu		

7.5. Zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a obciążeniem ciągłym belek – tw. Schwedlera–Żurawskiego



7.5. Zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a obciążeniem ciągłym belek – tw. Schwedlera–Żurawskiego





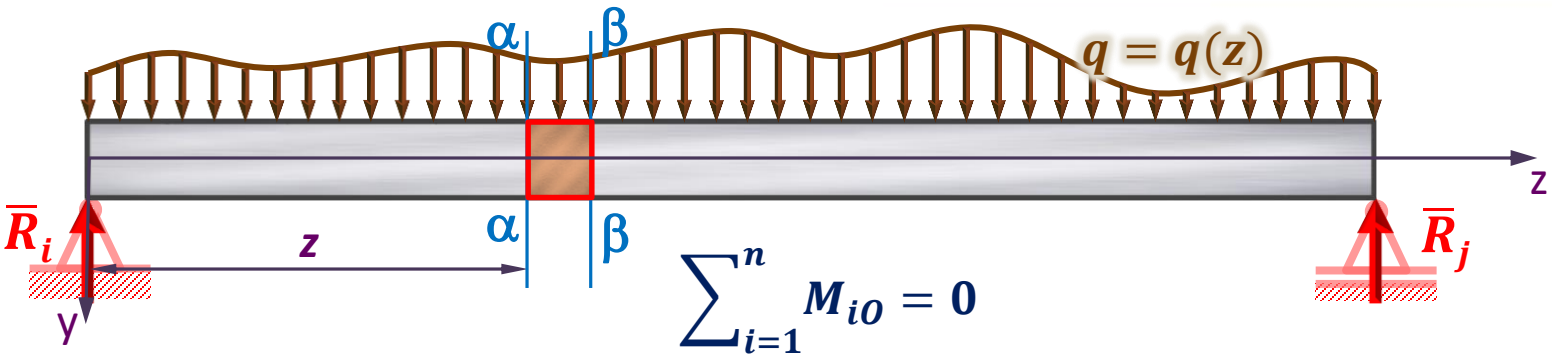
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \Rightarrow -\cancel{T} + q(z)dz + \cancel{T} + dT = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{q(z) = -\frac{dT}{dz}}$$

Wniosek:

W zakresie długości belki gdzie obciążona jest ona stałym co do wartości obciążeniem ciągłym ($q(z) = const \neq 0$) siła tnąca opisana jest równaniem pierwszego stopnia (zmienia się liniowo)

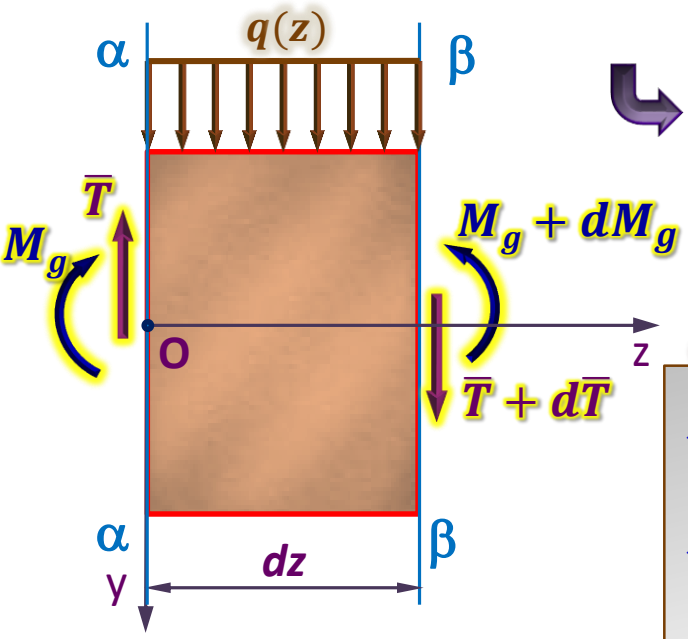
7.5. Zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a obciążeniem ciągłym belek – tw. Schwedlera–Żurawskiego



$$\sum_{i=1}^{n} M_{iO} = 0$$

$$-M_g - q(z)\frac{(dz)^2}{2} - (T + dT)dz + (M_g + dM_g) = 0$$

$$-\cancel{M_g} - q(z)\underbrace{\frac{(dz)^2}{2}}_{\approx 0} - Tdz + \underbrace{dTdz}_{\approx 0} + \cancel{M_g} + dM_g = 0$$

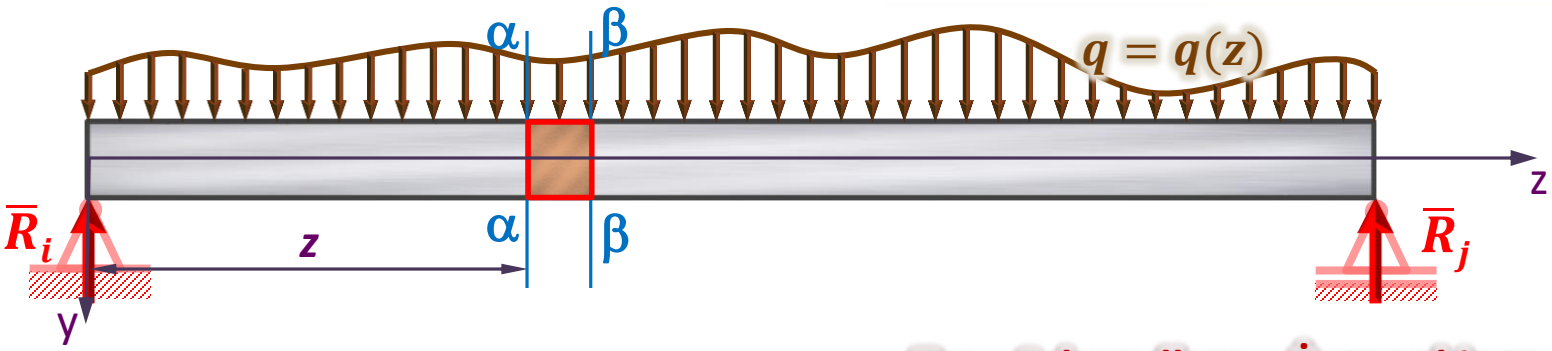


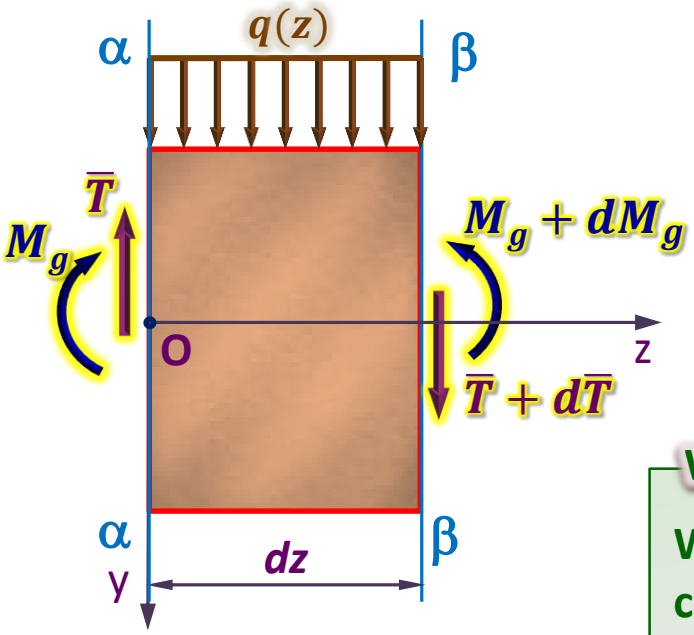
$$-Tdz + dM_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(z) = \frac{dM_g}{dz}}$$

Wnioski:

- ✓ **Pochodna funkcji momentu zginającego po współrzędnej wzdłuż osi belki jest równa sile poprzecznej.**
- ✓ **Ekstremum momentu zginającego wystąpi w przekroju gdzie siła poprzeczna jest równa zero.**

7.5. Zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a obciążeniem ciągłym belek – tw. Schwedlera–Żurawskiego





Tw. Schwedlera – Żurawskiego

$$q(z) = -\frac{dT}{dz}$$

$$T(z) = \frac{dM_g}{dz}$$

$$\Rightarrow \quad q(z) = -\frac{d^2 M_g}{dz^2}$$

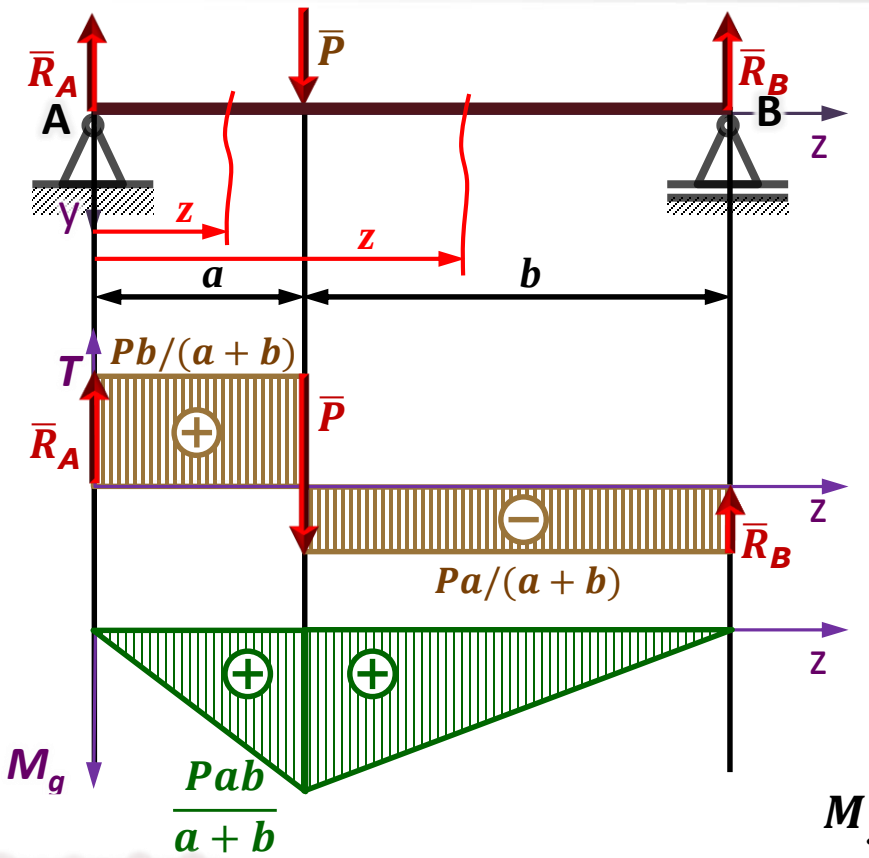
Wniosek:

W zakresie długości belki gdzie obciążona jest ona stałym co do wartości obciążeniem ciągłym ($q(z) = const \neq 0$) moment zginający jest opisany równaniem drugiego stopnia (zmienia się według paraboli).

Przykład 7.1

Dane: a, b, P

Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$



$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow -Pa + R_B(a+b) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{Pa}{a+b}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0 \Rightarrow -R_A(a+b) + Pb = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{Pb}{a+b}$$

$0 \le z \le a$

$$M_{g(z)} = R_A \cdot z = \frac{Pb}{a+b} \cdot z$$

$$M_{g(z=0)} = 0; \qquad M_{g(z=a)} = \frac{Pab}{a+b}$$

$a \le z \le a+b$

$$M_{g(z)} = R_A \cdot z - P(z-a) = \frac{Pb}{a+b} \cdot z - P(z-a)$$

$$M_{g(z=a)} = \frac{Pab}{a+b} \qquad M_{g(z=a+b)} = 0$$

Spostrzeżenia:

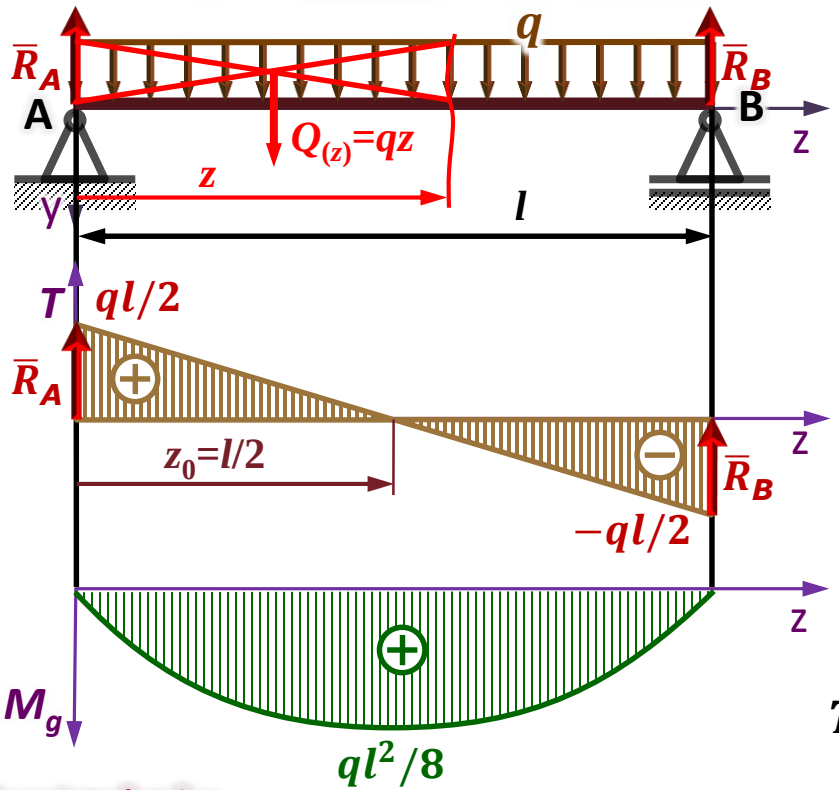
1) W miejscu działania skupionej siły poprzecznej występuje skokowa zmiana wartości siły tnącej.

2) Na końcach belki, o ile nie działa tam moment skupiony, moment zginający jest równy zeru.

Przykład 7.2

Dane: l, q

Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$



$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow -ql\cdot\frac{l}{2} + R_B l = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0 \Rightarrow ql\cdot\frac{l}{2} - R_A l = 0$$

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

$$0 \le z \le l$$

$$T_{(z)} = R_A - qz = \frac{ql}{2} - qz$$

$$T_{(z=0)} = \frac{ql}{2} \qquad T_{(z=l)} = -\frac{ql}{2}$$

$$T_{(z=z_0)} = \frac{ql}{2} - qz_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{l}{2}$$

$$M_{g(z)} = R_A\cdot z - q\cdot z\cdot\frac{z}{2} = \frac{ql}{2}z - q\cdot\frac{z^2}{2}$$

$$M_{g(z=0)} = 0 \qquad M_{g(z=l)} = 0$$

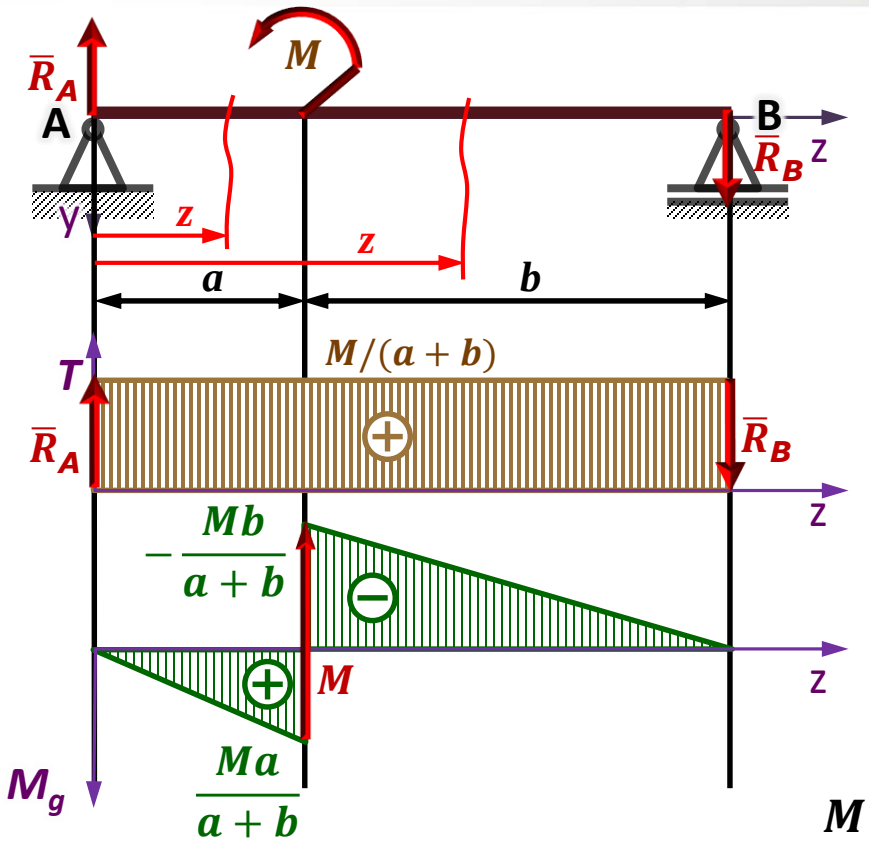
$$M_{g(z=z_0=l/2)} = \frac{ql}{2}\cdot\frac{l}{2} - q\cdot\frac{l^2}{8} = \frac{ql^2}{8}$$

Spostrzeżenia:

3) W zakresie działania niezerowego obciążenia ciągłego siła tnąca zmienia się liniowo, zaś moment zginający według paraboli.

4) W miejscu gdzie siła poprzeczna osiąga wartość zero występuje ekstremum momentu zginającego.

Przykład 7.3 Dane: a, b, M Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$



$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow M - R_B(a+b) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{M}{a+b}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0 \Rightarrow M - R_A(a+b) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{M}{a+b}$$

$0 \le z < a$

$$M_{g(z)} = R_A \cdot z = \frac{M}{a+b} \cdot z$$

$$M_{g(z=0)} = 0; \quad M_{g(z=a)} = \frac{Ma}{a+b}$$

$a \le z \le a+b$

$$M_{g(z)} = R_A \cdot z - M \quad M_{g(z)} = \frac{M}{a+b} \cdot z - M$$

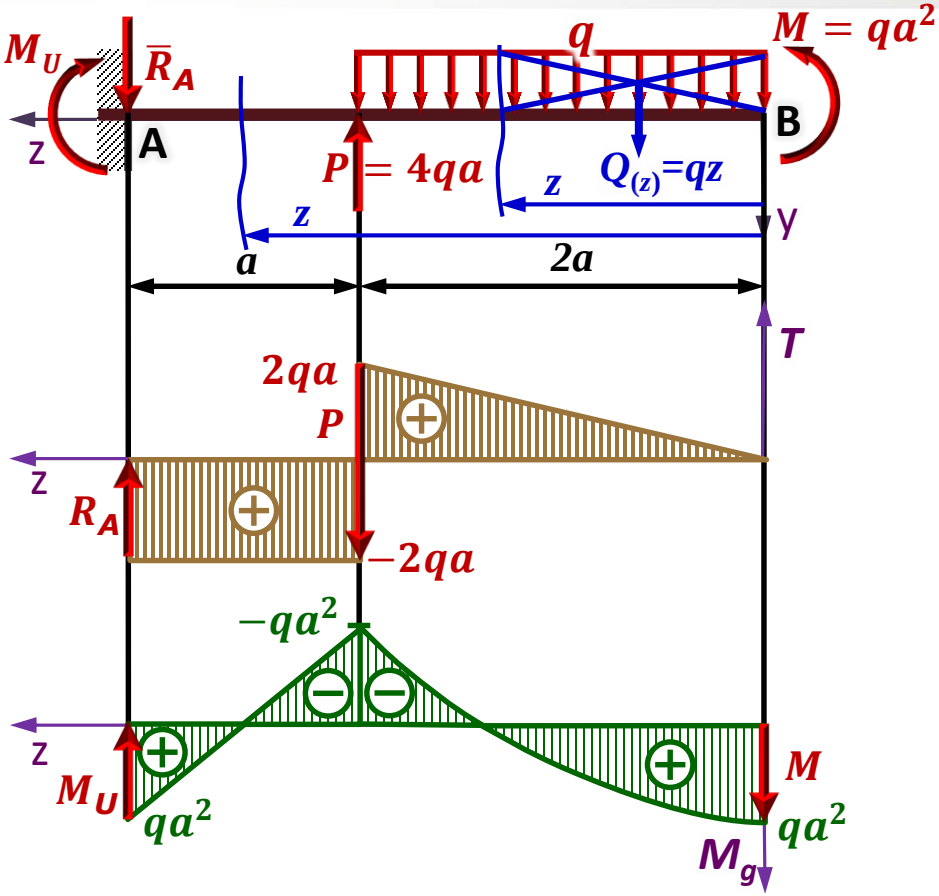
$$M_{g(z=a)} = \frac{Ma}{a+b} - M = M\left(\frac{a}{a+b} - 1\right) = -\frac{Mb}{a+b}$$

$$M_{g(z=a+b)} = 0$$

Spostrzeżenie:

5) W miejscu działania skupionego momentu występuje skokowa zmiana wartości momentu zginającego.

Przykład 7.4 Dane: a, q Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$



$$0 \le z \le 2a$$

$$T_{(z)} = qz$$

$$T_{(z=0)} = 0 \qquad T_{(z=2a)} = 2qa$$

$$M_{g(z)} = M - qz \cdot \frac{z}{2} = qa^2 - q\frac{z^2}{2}$$

$$M_{g(z=0)} = qa^2 \qquad M_{g(z=2a)} = -qa^2$$

$$2a \le z \le 3a$$

$$T_{(z)} = q \cdot 2a - P = 2qa - 4qa = -2qa$$

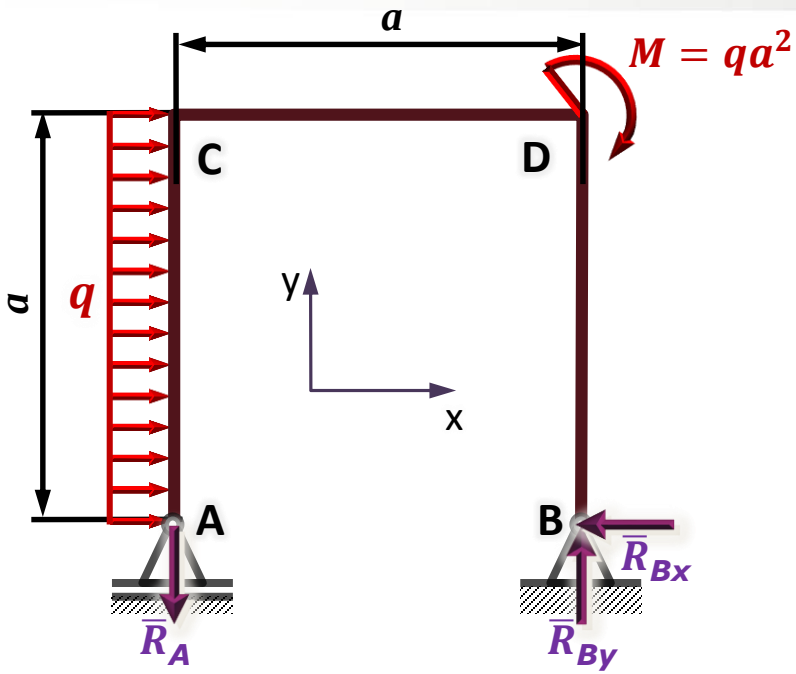
$$M_{g(z)} = M - q \cdot 2a \cdot (z - a) + P(z - 2a)$$

$$M_{g(z)} = qa^2 + 2qa^2 - 2qaz + 4qaz - 8qa^2$$

$$M_{g(z)} = 2qaz - 5qa^2$$

$$M_{g(z=2a)} = -qa^2 \qquad M_{g(z=3a)} = qa^2$$

Przykład 7.5 Dane: a, q Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$



1. Wyznaczanie reakcji:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow -qa\frac{a}{2} - \boxed{qa^2} + R_{By}a = 0 \qquad M = qa^2$$

$$\Rightarrow R_{By} = \frac{3}{2}qa$$

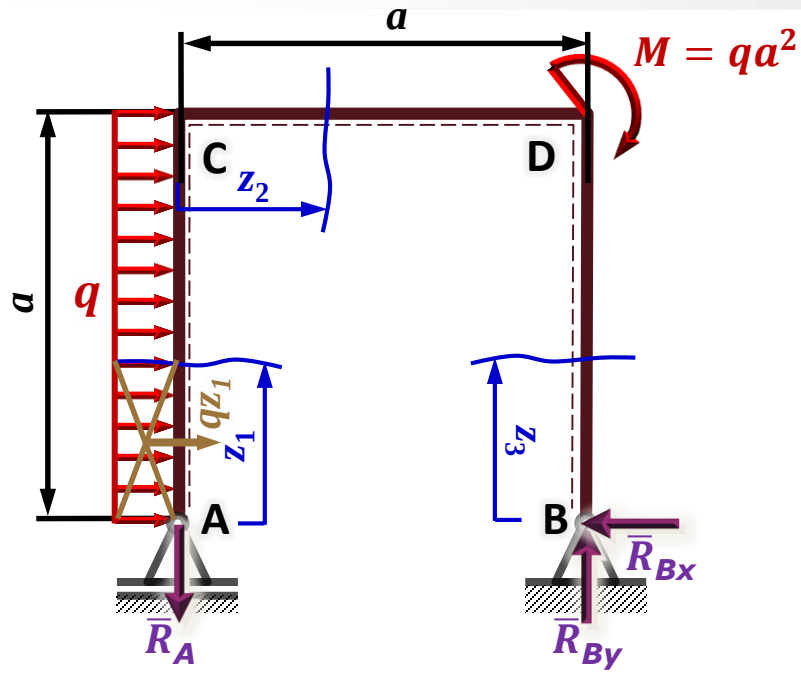
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \Rightarrow -R_A + \boxed{R_{By}} = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{3}{2}qa$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \Rightarrow qa - R_{Bx} = 0$$

$$\Rightarrow R_{Bx} = qa$$

Przykład 7.5 Dane: a, q Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$



$$R_A = \frac{3}{2}qa \qquad R_{Bx} = qa \qquad R_{By} = \frac{3}{2}qa$$

2. Wyznaczanie sił poprzecznych:

$0 \le z_1 \le a$

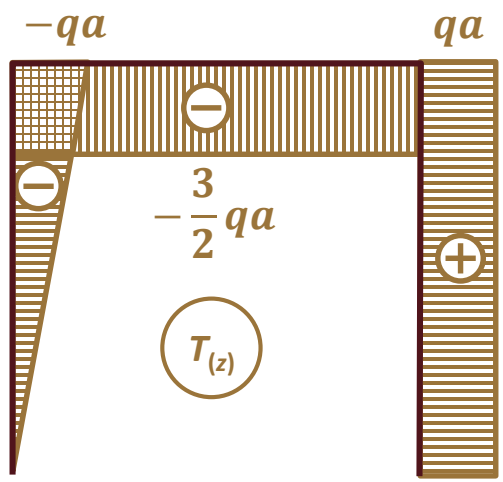
$$T_{(z_1)} = -qz_1 \Rightarrow T_{(z_1=0)} = 0 \quad T_{(z_1=a)} = -qa$$

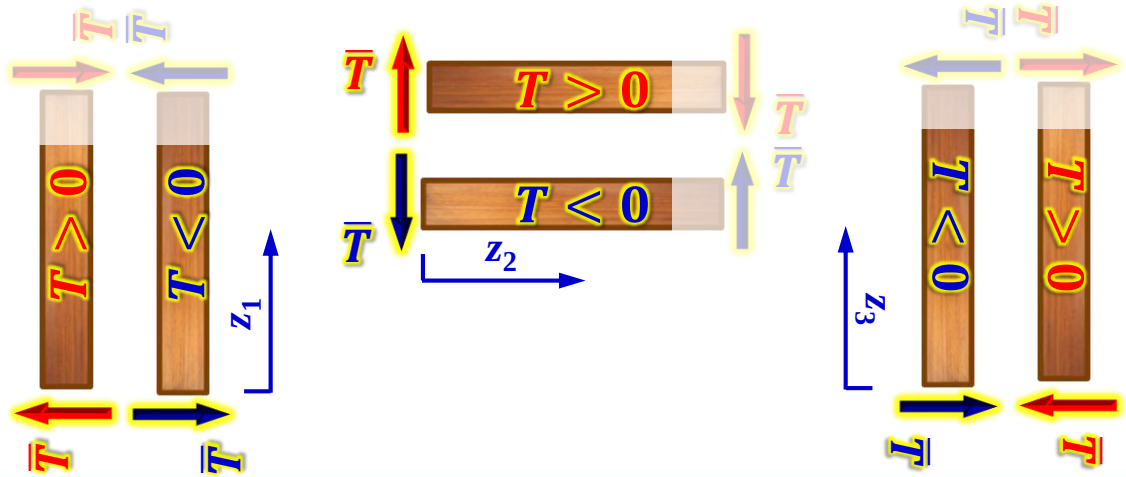
$0 \le z_2 \le a$

$$T_{(z_2)} = -RA = -\frac{3}{2}qa \Rightarrow T_{(z_2=0)} = T_{(z_2=a)} = -\frac{3}{2}qa$$

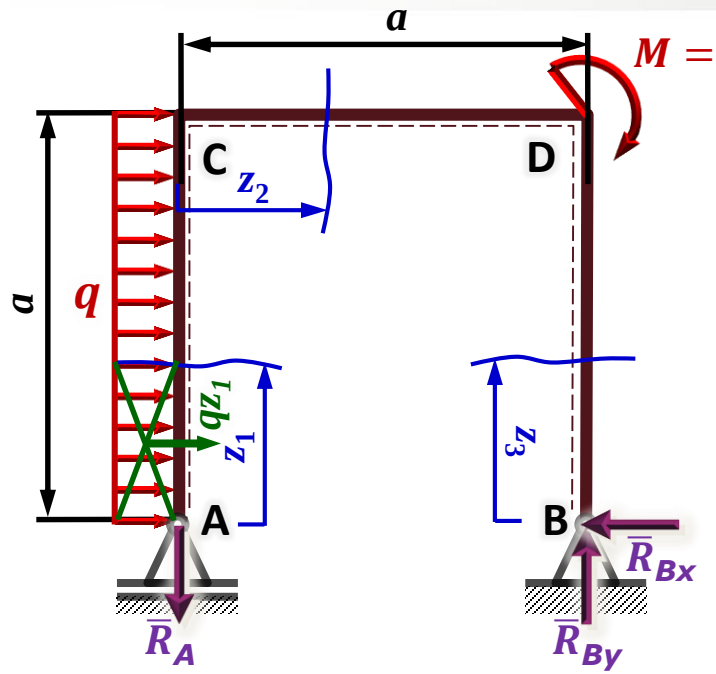
$0 \le z_3 \le a$

$$T_{(z_3)} = R_{Bx} = qa \Rightarrow T_{(z_3=0)} = T_{(z_3=a)} = qa$$





Przykład 7.5 Dane: a, q Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$



$R_A = \frac{3}{2}qa$ $R_{Bx} = qa$ $R_{By} = \frac{3}{2}qa$

3. Wyznaczanie momentów zginających:

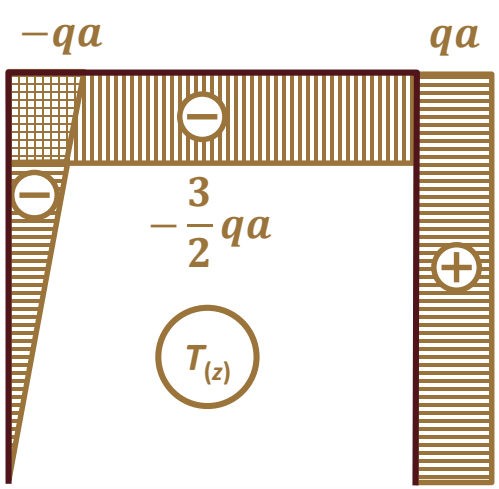
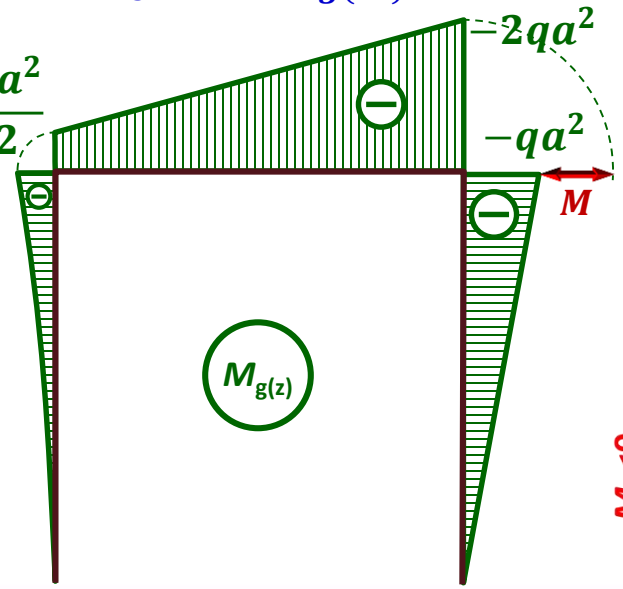
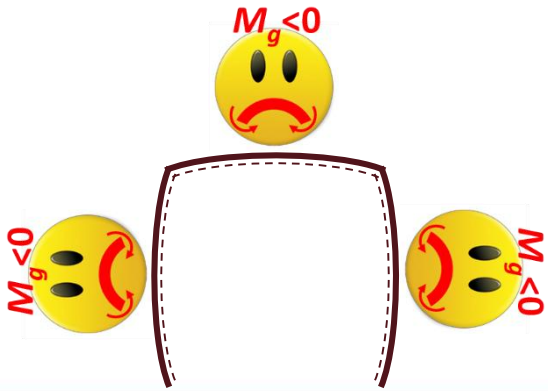
$0 \le z_1 \le a$: $M_{g(z1)} = -qz_1\frac{z_1}{2} = -q\frac{z_1^2}{2}$

$M_{g(z1=0)} = 0$ $M_{g(z1=a)} = -q\frac{a^2}{2}$

$0 \le z_2 \le a$: $M_{g(z2)} = -q\frac{a^2}{2} - RAz_2 = -q\frac{a^2}{2} - \frac{3}{2}qaz_2$

$M_{g(z2=0)} = -q\frac{a^2}{2}$ $M_{g(z2=a)} = -2qa^2$

$0 \le z_3 \le a$: $M_{g(z3)} = -R_{Bx}\, z_3 = -qaz_3$

$M_{g(z3=0)} = 0$

$M_{g(z3=a)} = -qa^2$